

УДК 517.972:519.633 **Наац И.Э. [Naats I.],**  
**Наац В.И. [Naats V.I.],**  
**Рыскаленко Р.А. [Riskalenko R.A.],**  
**Ярцева Е.П. [Yartseva E.P.]**

## **ОПЕРАТОРЫ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОГО АНАЛИЗА**

### **Operators of potential type in problems of applied analysis**

Рассматриваются эмпирические функции, заданные приближенно, например, на основе некоторых измерений наблюдаемого процесса или явления, полученных в эксперименте. Подобные функции часто встречаются в задачах математической физики и соответствующих численных моделях, использующих эти данные. При этом актуальной является задача восстановления или конструирования исходной функции по приближенным данным, которая решается в рамках конструктивной теории функций и теории приближения функций. В работе реализуется подход, согласно которому исследуемые функции представляются так называемыми сингулярными интегралами. В ряде прикладных задач искомым функциям в качестве исходного предположения предписывается необходимость представления в виде интеграла Стильтьеса. Подобные ситуации могут иметь место в теории потенциалов и тех задачах теоретической физики, которые используют интегральные операторы потенциального типа. Подобный подход заметно расширяет содержательную сторону аппарата приближения функций, придавая ему большую эффективность и наглядность в тех задачах, когда приходится «конструировать» модель исследуемой функциональной зависимости по приближенным данным. При этом, те вычислительные схемы, которые связаны с практической реализацией излагаемого метода в приложениях, в ряде случаев могут быть заметно проще и эффективнее тех алгоритмов, которые требуются для реализации интегральных представлений функций на основе сингулярных интегралов. В настоящей работе исследуемая функция представляется в виде интеграла Римана-Стильтьеса, на основе этого представления формулируется соответствующая оптимизационная задача и определяется ее решение. Рассматриваются примеры интегралов представления исследуемой функции и соответствующие схемы вычислений. Исследуются свойства получаемых приближенных решений и их связь со свойствами исходных функций. Излагается техника обобщенного дифференцирования интегралов представления функций, рассматриваются вопросы регуляризации сходимости интегральных операторов обобщенного дифференцирования. Приводится пример конструирования интегралов Стильтьеса на основе заданного множества параметризованных функций, формулируются и доказываются две леммы, определяющих выбор параметров соответствующей вычислительной модели.

Discusses empirical functions that are specified approximately, for example, based on some measurements of the observed process or phenomenon, obtained in the experiment. Such functions are often encountered in problems of mathematical physics and related numerical models that use these data. In this case the current task is the restoration or construction of the original function by an approximate data, which is solved in the constructive theory of functions and theory of approximations of functions. The work implements the approach according to which the studied functions are the so-called singular integrals. In a number of application tasks desired functions as the assumptions it prescribes a representation in the form of a Stieltjes integral. A similar situation can take place in the theory of potentials and the theoretical physics problems that use integral operators of potential type. This approach significantly expands the content side of the apparatus of approximation of functions, giving it greater efficiency and clarity in those tasks when you have to “construct” a model study of the functional dependence on approximate data. In this case, the processing schemes that are associated with the practical implementation of the method set out in applications that in some cases can be much simpler and more efficient algorithms that are required for the implementation of integral representations of functions based on singular integrals. In the present work, the investigated function is in the form of

the integral, Riemann-Stieltjes, on this view, formulate the corresponding optimization problem and defines its solution. Consider examples of integrals of performance of the studied functions and the corresponding computational scheme. We investigate the properties of the resulting approximate solutions and their relationship to the properties of the original functions. Outlines a technique of the generalized differentiation of integrals representations of functions, the issues of regularization convergence of integral operators of generalized differentiation. An example of the construction of Stieltjes integrals based on a given set of parameterized functions are formulated and proved two lemmas that determine the choice of appropriate parameters in the computational model.

**Ключевые слова:** эмпирическая функция, теория приближения функций, интеграл Римана – Стильтьеса, задачи прикладного анализа, сингулярные интегралы, операторы обобщенного дифференцирования.

**Key words:** empirical function, theory of approximation of functions, the integral Riemann – Stieltjes, problems of applied analysis, singular integrals, operators of generalized differentiation.

### Введение

Представленная работа продолжает исследования авторов по конструктивной теории функций применительно к задачам восстановления функций по приближенным данным на основе их представления интегралами [1, 2]. Использованный в названии работы термин «прикладной анализ» соответствует той интерпретации его содержательного смысла, которая ему дана в известной монографии К. Ланцоша «Практические методы прикладного анализа» [3]. Основными задачами названной выше теории являются:

- 1) формулировка задач восстановления функциональных зависимостей по соответствующим приближенным данным, включая и эмпирические наблюдения;
- 2) разработка методов конструирования надлежащих аналитических выражений на основе сингулярных интегральных операторов;
- 3) разработка численных методов и алгоритмов для решения прикладных задач теории приближения функций.

Перечисленные выше задачи в той или иной мере последовательно излагаются ниже в данной работе.

### Материалы и методы исследований

Остановимся кратко на формулировке решаемой ниже задачи восстановления (конструирования) функции по приближенным данным. Допустим, что исследуется функциональная зависимость величины  $Y = \{y : c \leq y \leq d\}$  от величины  $X = \{x : a \leq x \leq d\}$  в предположении, что они действительно связаны функционально друг с другом. Последнее обстоятельство фиксируется символом « $f$ » и означает существование функционального отношения « $xfy$ », допускающим совместное изучение пары  $(X, Y)$ , где  $Y = \{y : A_1 \leq y = f(x) <$

$< A_2\}$  и  $A_1, A_2$  – некоторые постоянные. В пределах настоящей работы предполагается, что система  $(X, Y)$  представлена неким дискретным множеством значений  $B(f) = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ . Удобно считать, что  $(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i))$ , где  $t_i \in [t_0, T]$ , то есть  $B(f)$  ассоциируется с неким временным процессом. Подобная ситуация имеет место, когда  $B(f)$  состоит из данных натурального эксперимента или является результатом последовательных вычислений. Ясно, что значения  $x_i$  и  $y_i$  являются приближенными числами. Когда требуется особо подчеркнуть это обстоятельство, будем писать  $\tilde{x}_i$  и  $\tilde{y}_i$ . Известно, что выполнение арифметических операций на множествах приближенных чисел требует определенной осторожности в силу возможной некорректности и неустойчивости операторов решающего алгоритма [4]. Приближенный характер элементов множества  $B(f)$  позволяет говорить о неопределенности, вносимой ими в результаты расчетов в процессе восстановления функциональной зависимости  $f$ , и требует той или иной оценки достоверности последних. Наиболее простым способом оценить неопределенность в исходных данных и ее влияние на результаты интерпретации следует считать использование так называемых  $\sigma$  – приближений функций, которые ниже будем обозначать через  $f_\sigma$ . В ситуации, когда исследуемые функции  $f(x)$  являются в свою очередь элементами нормированных функциональных пространств, ввести  $f_\sigma(x)$  ( $x \in \Omega_x$ ) можно, например, с помощью соотношения

$$\|f(x) - f_\sigma(x)\|_{L_2(\Omega_x)} \leq \sigma \|f_\sigma(x)\|_{L_2(\Omega_x)}, \quad (1)$$

где  $\sigma > 0$  (достаточно малое число).

В условии (1) нормы  $\|f(x)\|_{L_2(\Omega)}$  и  $\|f_\sigma(x)\|_{L_2(\Omega)}$  считаются сравнимыми. Последнее означает, что существуют такие два близких числа  $C_1$  и  $C_2$ , что

$$C_1 \|f_\sigma\|_{L_2} < \|f\|_{L_2} < C_2 \|f_\sigma\|_{L_2}. \quad (2)$$

Напомним, что  $f_\sigma(x)$  в пределах  $\Omega_x = [a, b]$  считается известной (суммируемой) функцией при задании  $B_\sigma$  и, стало быть,  $\|f_\sigma\|_{L_2(\Omega)}$  в принципе можно вычислить. Напомним, что восстановление функции  $f(x)$  на  $\Omega_x$  по ее  $\sigma$  – приближению  $f_\sigma(x)$  в определенной степени может рассматриваться как задача теории приближения функций в рамках определенного аналитического аппарата. В частности, речь может идти о равномерном приближении функций степенными и тригонометрическими полиномами. Разумеется, что эти аппараты приближения в полной мере не исчерпывают того содержания, которое в принципе может ассоциироваться с понятием «восстановления» исследуемой функциональной зависимости, о чем подробнее речь пойдет ниже.

В пределах настоящей работы исходим из возможности представления исследуемой функции  $f(x)$  в виде интеграла

$$\int_{\Omega_y} K(x, y)g(y)dy = f(x, g), \quad (3)$$

где  $g \in G \subseteq C_{\Sigma}(\Omega)$  и  $K(x, y)$  ядро интегрального оператора  $K$  ( $(Kg)(x) = f(x, g)$ ).

В рамках этого предположения требуется решить оптимизационную задачу типа

$$\inf_{g \in G} \|f(x, g) - f(x)\|_{L_2(\Omega)} = \|f(x, g^*) - f(x)\|_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon > 0$  и достаточно мало.

Решением оптимизационной задачи (4) является вспомогательная функция  $g^*(y)$  из функционального класса  $G$ , и соответственно восстановление  $f(x)$  на  $\Omega_x$  осуществляется с помощью функции вида  $(Kg^*)(x) = f^*(x)$ . Критерием приемлемости подобного (аппроксимационного) подхода к определению  $f(x)$  в форме интеграла (3) является соотношение

$$\frac{\|f^* - f\|_{L_2}}{\|f^*\|_{L_2}} < \varepsilon. \quad (5)$$

Вопросы выбора ядра  $K(x, y)$  в интеграле представления (3), а также надлежащего функционального класса  $G$ , в пределах которого находится элемент, минимизирующий функционал  $[f(x, g) - f(x)]$ , должны увязываться с теми или иными особенностями решаемой прикладной задачи.

### Результаты исследований и их обсуждение

*Примеры интегралов представления исследуемой функции и соответствующие схемы вычислений*

Будем рассматривать интеграл представления для исследуемой функции  $f(x)$  в виде интеграла Римана – Стильтьеса вида

$$\int_{\Omega_y} T_{\beta}(x, y)dP(y) = f_{\beta}(x, P), \quad (6)$$

где ядром является функция

$$T_{\beta}(x, y) = \frac{1}{|x - y|^{\beta}}, \quad 0 < \beta < 1, \quad (7a)$$

либо

$$T_{\mu}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x - y|} & \text{при } |x - y| \geq \mu > 0, \\ C\mu & \text{при } |x - y| < \mu. \end{cases} \quad (7b)$$

В выражении (6)  $P(y)$  называется интегрирующей функцией. Ясно, что в данном примере речь идет о прикладных задачах теории потенциала и каких-либо обоснований практической значимости модели (6) (тоже  $f_\mu(x, P)$ ) не требуется. Исходя из того, что  $f(x)$  представлена своим  $\sigma$  – приближением, оптимизационная задача представляется в виде

$$\inf_{P \in \mathfrak{S}} \|f_\sigma(x) - f_\beta(x, P)\|_{L_2} = \|f_\sigma - f_\beta(P^*)\|_{L_2}. \quad (8)$$

Решение  $P^*$  можно считать приемлемым, если удовлетворяется условие

$$\frac{\|f_\sigma - f_\beta^*\|_{L_2}}{\|f_\sigma\|_{L_2}} \leq \sigma. \quad (9)$$

В рамках аппроксимационного подхода к задаче восстановления функции  $f(x)$  по  $\sigma$  – приближению  $f_\sigma(x)$  важным является следующее утверждение 1.

**Утверждение 1.** При выполнении (9) удовлетворяется условие

$$\frac{\|f - f_\beta^*\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}} \leq \sigma. \quad (10)$$

При доказательстве этого утверждения можно исходить из неравенства (1) и соотношения (2), в котором  $C_1 = 1 - \sigma$  и  $C_2 = 1 + \sigma$ . Используются также аксиомы норм и метрик, индуцируемых последними. Вычислительные алгоритмы строятся с учетом того обстоятельства, что исходные данные о функции  $f(x)$  представлены множеством  $B_\sigma(N, f) = \{(x_i, f_{\sigma,i})\}_{i=1}^N$ . Интеграл в (6), как известно, представляется с учетом данного обстоятельства интегральной суммой вида

$$S_m(x, P) = \sum_{l=1}^m T_\mu(x, \xi_l) \Delta_l P, \quad (11)$$

где  $y_{l-1} \leq \xi_l \leq y_l$ ,  $\Delta_l P = P(y_l) - P(y_{l-1})$  и  $\{y_l\}_{l=0}^m$  – некое разбиение отрезка  $\Omega = [a, b]$  ( $m \leq M$ ). В этой ситуации, обозначая  $\vec{f}_\sigma = \{f_{\sigma,k}\}_{k=1}^K$  и  $\vec{S}_m(P) = \{S_m(x_k, P)\}_{k=1}^K$  ( $K \leq N$ ), приходим к конечномерному варианту оптимизационной задачи для квадратичной формы  $\rho(\vec{f}_\sigma, \vec{S}(P)) = \|\vec{f}_\sigma - \vec{S}(P)\|_{l_2^{(k)}}$  относительно вектора  $\vec{P} \in \mathfrak{S}_m$  с компонентами  $P(y_l)$  ( $l = 1 \dots m$ ). Окончательным решением задачи восстановления  $f(x)$  в рамках изложенного подхода является

непрерывная функция  $S_m(x, P^*) = \sum_{i=1}^m T_\mu(x, \zeta_i) \Delta_i P^*$ . Численные методы и алгоритмы решения подобных задач теории приближения функций на основе их представления интегралами Стильтьеса подробно изложены в работах автора [1, 2].

В соответствии с изложенной выше теорией восстановления функций по  $B_N(f)$  определяющую роль играют линейные функционалы вида  $f_\beta(x, P)$  (тоже  $f_\mu(x, P)$ ) ассоциированными с интегралами Римана–Стильтьеса (6). Напомним, что при  $\beta = 1$  и  $\mu = 0$  последние становятся сингулярными (особая точка в нуле) и требуют использования способов регуляризации их сходимости. Условия  $\beta \in (0, 1)$  и  $\mu > 0$  вполне достаточны для построения устойчивых квадратурных процессов в приложениях. Функционалы  $f_\beta(x, P)$  и  $f_\mu(x, P)$  решают задачу построения приближения  $f_\beta(x, P^*)$  и  $f_\mu(x, P^*)$  для исследуемой функции  $f(x)$  как непрерывной и ограниченной по переменной  $x \in \Omega$ . В этом смысле их можно считать аналитическими (расчетными) моделями  $f(x)$ .

Рассмотренный выше вариант интегралов представления далеко не единственный. В частности, в рамках теории интегрирования Стильтьеса может быть рассмотрен случай (3), а именно

$$f(x, g) = \int_{\Omega_y} T_\beta(x, y) g(y) d\varphi(y), \quad (12)$$

где  $g \in G \subseteq C_\Sigma(\Omega_y)$  и интегрирующая функция  $\varphi(y)$  считается заданной в пределах области интегрирования  $\Omega_y$ . Элемент  $g^*(y)$ , минимизирующий уклонение  $\rho(f_\sigma, f(g)) = \|f_\sigma - f(g)\|_{L_2}$  на  $G$ , определяется теми же численными методами, о которых говорилось выше. Можно лишь заметить, что теперь помимо методов оптимизации (неявный способ обращения интеграла представления (12)) можно использовать и методы обобщенной инверсии интегральных операторов [5].

Схема вычислений примерно выглядит следующим образом. Обозначим через  $T_\varphi$  оператор, соответствующий интегралу (12) ( $T_\varphi: g \rightarrow f(g)$ ,  $g \in G$ ). Тогда  $g^*$  должно удовлетворять интегральному уравнению первого рода вида  $T_\varphi g \cong f_\sigma$ . Обобщенный (регуляризирующий) обратный оператор можно записать в явной форме, а именно

$$T_\alpha^{-1} = \left( T_\varphi^* T_\varphi + \alpha I \right)^{-1} T_\varphi^*, \quad (13)$$

где  $\alpha(\sigma) > 0$  ( $\alpha(\sigma) \rightarrow 0$  где  $\sigma \rightarrow 0$ ) –

так называемый параметр регуляризации [6]. Эти построения приводят нас к аппроксимационному функционалу  $f_\varphi(x, g^*)$ . В дальнейшем в целях упрощения записи аналитических выражений будем писать  $f^*(x)$  вместо  $f(x, g^*, \varphi)$  и  $f(x, \varphi^*)$ . Ясно, что поскольку определение  $f^*(x)$  методами обобщенной инверсии интегралов представления осуществляется на основе данных  $f(N, f)$ , то  $f^*(x)$  в той или иной мере наследует свойства  $f(x)$ . Ко-

нечно, ответить на вопрос какие это свойства и в какой мере о них можно судить, весьма затруднительно. Это предмет конструктивной теории функций [7]. Ниже ограничимся лишь качественным анализом основных свойств  $f^*(x)$  в рамках изложенного выше подхода и их возможной связи с аналитическими свойствами исследуемой функции  $f(x)$ .

### Качественный анализ основных свойств $f^*(x)$ и их возможной связи с аналитическими свойствами исследуемой функции $f(x)$

В последующем анализе исходим прежде всего из того факта, что  $f^*(x)$  и  $f(x)$  достаточно (в пределах точности возможных вычислений во всяком случае) близки друг к другу. Последнее следует из соотношения

$$\frac{\|f - f^*\|}{\|f^*\|} < \varepsilon(\sigma), \quad (14)$$

где  $\varepsilon$  – достаточно малое число ( $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$  где  $\sigma \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ ).

Если представляется возможным говорить о сходимости  $\|f - f^*\| \rightarrow 0$ , то это только в среднем на  $\Omega_x$  и о поточечном сопоставлении  $f^*(x)$  и  $f(x)$  конечно, речи быть не может. Можно говорить лишь о таких свойствах этих функций, как характер непрерывности, значения полной вариации функций в пределах  $\Omega_x$ , выпуклость и т.п.

Исследуем прежде всего свойство непрерывности  $f(x, \varphi)$  по переменной  $x \in \Omega_x$  исходя из представления

$$f(x, \varphi) = \int_{|x-y| \geq \mu} T(x, y) d\varphi(y), \quad (15)$$

где  $x, y \in R_1 = (0, \infty)$ .

В принципе, без ограничения общности, можно считать, что ядро  $T(x, y) \equiv 0$  в области  $|x - y| < \mu$ , что обычно и допускается в теории операторов потенциального типа. Вместе с тем следует заметить, что при решении вычислительных задач и прежде всего в случае привлечения методов вычислительного эксперимента, предпочтительно исходить из параметризованной модели (более «мягкой» как принято говорить), а именно

$$f(x, \varphi) = \int_{\mu}^{x-\mu} \frac{d\varphi(y)}{x-y} + \int_{x+\mu}^{\infty} \frac{d\varphi(y)}{y-x} + \frac{1}{2\mu} \int_{x-\mu}^{x+\mu} d\varphi(y). \quad (16)$$

В этом представлении величина  $\mu$  ( $\mu > 0$ ) играет роль неопределенного параметра, конкретное значение которого выбирается надлежащим образом в прикладных задачах. Выбор подобных параметров следует отнести к методам качественного анализа, опирающегося в большей мере на вычислительный эксперимент.

Напомним, что непрерывность функционала  $f(x, \varphi)$  по переменной  $x$  требует выполнения условия  $|f(x_2, \varphi) - f(x_1, \varphi)| < \varepsilon$  всякий раз, когда  $|x_2 - x_1| < \delta$ . С учетом (15) это приводит к необходимости доказать неравенство

$$|f(x_2, \varphi) - f(x_1, \varphi)| \leq \int_{|x-y| \geq \mu} |T(x_2, y) - T(x_1, y)| d\varphi(y) < \varepsilon \quad (17)$$

при  $|x_2 - x_1| < \delta$ . При доказательстве (17) исходим из того, что интегрирующая функция  $\varphi(y)$  удовлетворяет условию

$$0 < \varphi(y) \leq 1 \quad \forall y \in (0, \infty). \quad (18)$$

Методы построения подобных функций будут рассмотрены ниже. Пока лишь заметим, что  $\varphi$  – интегрируемость в теории интегрирования Стильеса прямо связана с  $\varphi$  – измеримостью функций, что и гарантируется на основе (18) как будет показано далее. Очевидно следующее равенство

$$|T(x_2, y) - T(x_1, y)| = \left| \frac{1}{x_2 - y} - \frac{1}{x_1 - y} \right| = \frac{|x_2 - x_1|}{|(x_1 - y)^2 + (x_2 - x_1)(x_1 - y)|} \quad (19)$$

Учитывая наличие ограничения  $|x - x| \geq \mu$ , приходим к неравенству

$$|f(x_2, \varphi) - f(x_1, \varphi)| \leq \frac{|x_2 - x_1|}{2\mu^2}, \quad \mu > 0. \quad (20)$$

Ясно, что условие  $|x_2 - x_1| \rightarrow 0$  имеет смысл лишь при учете процесса  $\mu \rightarrow 0$ . В противном случае говорить о непрерывности  $f(x, \varphi)$  не представляется возможным. Нетрудно видеть, что отношение  $|x_2 - x_1|/\mu^2$  останется ограниченным при  $|x_2 - x_1| \rightarrow 0$  и  $\mu \rightarrow 0$  только в том случае, если наложить ограничение  $|x_2 - x_1| < \mu^2$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Поскольку  $\mu \ll 1$ , то  $\mu^3 < \mu^2$  и, следовательно, можно принять условие  $|x_2 - x_1| < \mu^3$ . Тогда  $\mu = |x_2 - x_1|^{1/3}$  и указанное выше отношение примет значение

$$\frac{|x_2 - x_1|}{\mu^2} < \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1|^{1/3}} = |x_2 - x_1|^{2/3}. \quad (21)$$

Полученный результат можно сформулировать в виде следующего утверждения 2.

**Утверждение 2.** Функции  $f(x, \varphi)$ , определенные сингулярным интегралом (15), удовлетворяют условию Гёльдера с показателем  $\gamma$ , то есть

$$|f(x_2, \varphi) - f(x_1, \varphi)| \leq M|x_2 - x_1|^\gamma, \quad (22)$$

где  $\gamma \in (0, 1/2)$  и  $M = 1/2$ . Подобные функции считаются непрерывными по Гёльдеру, если

$$|f| = \sup_{x, y \in E} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty. \quad (23)$$

Известно, что совокупность подобных функций с нормой (23) образует  $B$  – пространство, играющее важную роль в изучении некоторых сингулярных интегральных операторов, появляющихся, в частности, в теории дифференциальных уравнений [8]. Свойство функций  $f(x, \varphi)$  быть «непрерывными» по Гёльдеру в принципе можно распространить и на  $f(x)$  в силу их взаимной близости в соответствии с критерием (14) при  $\varphi = \varphi^*$ . Конечно, подобное допущение следует считать «мягким» (нечетким), оставляя выбор значения показателя  $\gamma$  в пределах  $(0, 1/2)$  открытым.

Несколько подобных замечаний можно сделать и относительно свойств  $f(x, g)$ , представленной выше интегралом (12). Поскольку  $T_\beta(|x - y|) \rightarrow 0$  при  $|x - y| \rightarrow \infty$ , то можно указать некую окрестность вблизи диагонали  $y = x$  такую, что

$$\int_0^\infty T_\beta(x, y)g(y)d\varphi(y) \cong \int_{\delta_y(x, \varepsilon)} T_\beta(x, y)g(y)d\varphi(y) + O(\varepsilon), \quad (24)$$

где  $\delta_y(x, \varepsilon) = \{y : |x - y|^{-\beta} > \varepsilon\}$  и  $\varepsilon > 0$ .

Нетрудно построить явное выражение для оценки размеров области интегрирования. Имеем

$$\delta_y(x, \varepsilon) = (x - \sqrt[\beta]{\varepsilon} \leq y \leq x + \sqrt[\beta]{\varepsilon}). \quad (25)$$

Подобные соотношения указывают на то важное обстоятельство, что усредняющий (сглаживающий) эффект интегрирования в левой части (24) на подынтегральное выражение по существу ограничивается малой окрестностью точки  $x$  на вещественной оси, в пределах которой ядро  $T_\beta(x,y)$  принимает свои наибольшие значения. Последнее означает, что поведение  $f_\beta(x,g)$  как функции точки  $x$  определяется поведением функции  $g(y)$  в области  $\delta_\beta(x,\varepsilon)$  (25).

В свою очередь  $g(y) = (T_\alpha^{-1}f_\sigma)(y)$  в рамках изложенного выше подхода к аппроксимации на  $B_\sigma(f,N)$ . Зависимость  $g^*(y)$  от  $\sigma$  – приближения  $f_\sigma(x)$  с учетом эффекта локализации интегралов представления (24) предопределяет в конечном итоге функциональную связь аппроксимирующих функций (функционалов)  $f(x,g)$  с исходными  $f(x)$ . Соответствующие числовые характеристики подобной взаимозависимости могут быть получены в вычислительных экспериментах при решении конкретных прикладных задач. Требуемое при этом программное обеспечение включает в себя квадратуры для вычисления сингулярных интегралов и методы обобщенной инверсии интегральных операторов (интегральных уравнений). Численные методы решения подобных задач описывались ранее авторами в работах [5, 9].

Заметим, что подобное программное обеспечение может быть использовано и при решении дифференциальных уравнений с приближенными данными. В этой ситуации считается, что исследуемая функция  $f(x)$  представлена операторным уравнением  $L_q f \approx S_\sigma$ , где  $L_q$  – дифференциальный оператор с вектором коэффициентов  $q$  и приближенной правой частью  $S_\sigma$ . Если  $f(x)$  искать в форме (12), то вспомогательная функция  $g(y)$  будет определяться как решение интегрального уравнения вида  $K_q g = S_\sigma$ . Ясно, что, как и выше  $g^*(y) = K_{q,\alpha}^{-1} S_\sigma$  и аппроксимационный функционал принимает вид  $f(x,g^*) = \hat{f}^*(x)$ . Остается напомнить, что в этом подходе найденные решения  $\hat{f}^*(x)$  зависят от интегрирующей функции  $\varphi(y)$ , параметров модели  $(\beta,\mu)$  и параметров  $(\alpha,\sigma)$ , связанных с приближенным заданием исходных данных и в значительной степени определяющих устойчивость решающих алгоритмов. Вопросы, связанные с выбором указанных параметров излагались в работах автора [10].

**Метод обобщенного дифференцирования интегралов  
представления функций, регуляризация сходимости  
интегральных операторов обобщенного  
дифференцирования**

В связи с указанным выше возможным применением интегралов представления следует сделать несколько замечаний, касающихся техники их дифференцирования по переменной  $x \in \Omega_x$ . Речь идет о дифферен-

цировании функций вида  $f(x, g, \varphi)$ . Поскольку функции типа  $f(x, g, \varphi)$  и  $f(x, g)$  в пределах настоящего исследования являются непрерывными по Гёльдеру, то применение к ним методов обычного (поточечного) дифференцирования более, чем затруднительно. В этой ситуации требуется построение так называемых операторов обобщенного дифференцирования, реализуемых как некие интегральные операторы. Условно говоря, речь идет о технике дифференцирования на основе операций интегрирования. Численные методы и решающие алгоритмы применительно к задачам прикладного анализа изложены в работах авторов [1, 2, 5, 9]. Ясно, что если исследуемые функции представляются интегралами Стильтьеса, то есть в основу положено свойство их  $\varphi$  – интегрируемости, возможны определенные модификации в аппарате обобщенного дифференцирования, которые и описываются ниже. Изложение техники дифференцирования функций  $f(x, g, \varphi)$  и  $f(x, g)$  естественно начать с введения разностного оператора  $D_h$ , определяемого формулой

$$(D_h f)(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \quad (26)$$

Вопрос существования предела  $(D_h f)(x)$  при  $h \rightarrow 0$  в каждой точке  $x \in \Omega_x$  остается открытым для функций  $f(x, g) = (T_\varphi g)(x)$  и  $f(x, g) = (T\varphi)(x)$ . Поскольку указанные функции ограничены в пределах  $\Omega_x$ , то формально оператор  $D_h$  к ним применим при условии  $h > 0$ . В соответствии с тем, что говорилось выше о соотношении между параметрами  $h$  и  $\mu$  в качестве определения «производных» для  $f(x, g)$  можно полагать

$$(D_\mu f)(x) = \sup_{h \geq \mu} (D_h (T_\varphi g))(x). \quad (27)$$

Ясно, что в вычислительном отношении подобный подход весьма сложен и навряд ли может быть оправданным с практической точки зрения. Совсем другое дело, если бы оператор  $D_h$  мог быть внесен под знак интеграла и операция «дифференцирования» осуществлялась вычислением интеграла  $((D_h T_\varphi)g)(x)$  с ядром  $1/2h [T(x+h, y) - T(x-h, y)]$ . Поскольку подобный интеграл будет расходящимся, необходимо решить вопрос о его регуляризации путем надлежащего выбора соотношений между параметрами  $h$  и  $\mu$ , определяющих оператор  $D_h$  в (27). С этой целью рассмотрим интеграл

$$\int_{|x-y| \geq \mu} \frac{1}{2h} [T(x+h, y) - T(x-h, y)] d\varphi(y). \quad (28)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2h} [T(x+h, y) - T(x-h, y)] = \frac{1}{(x-y+h)(x-y-h)},$$

то

$$\left| \int_{|x-y| \geq \mu} \frac{1}{2h} [T(x+h, y) - T(x-h, y)] d\varphi \right| \leq \frac{1}{|\mu^2 - h^2|} \int_{\Omega_y} d\varphi(y). \quad (29)$$

Ясно, что для регуляризации сходимости подобного сингулярного интеграла простого соотношения  $h \geq \mu$ , как это имело место выше в случае (19), уже недостаточно и необходимы более жесткие ограничения. Один из вариантов их построения может основываться на надлежащем выборе интегрирующих функций  $\varphi(y)$ , используемых в исходном интеграле представления. Если говорить более определенно, то предлагается ввести в рассмотрение специальные параметризованные подмножества функций  $\{\varphi_\tau(y)\}$ , где  $0 < \tau \leq d$  с последующим «оптимальным» выбором значений параметра  $\tau$ . Относительно того, что говорилось выше о регуляризации интеграла (29) подобная оптимальность может быть связана с его ограниченностью при малых  $h$  для всякой пары  $(x, \tau)$ . Соответствующие приемы подобной регуляризации сходимости интегралов представления и их обобщенных обратных рассматривались подробно в работах авторов [2, 9], и касались в основном, интегралов Римана. Для интегралов Стильтеса можно указать определенные особенности соответствующей регуляризации интегральных операторов обобщенного дифференцирования.

Остается заметить, что необходимость введения в математическую задачу параметризованных семейств функций (последовательностей) определяется, как правило, их некорректностью, ведущей к расходимости решающих алгоритмов. Вносимая при этом в задачу неопределенность разрешается далее в заключительных операторах алгоритмов за счет надлежащего доопределения условий задачи априорными допущениями и числовыми критериями.

При выборе  $\{\varphi_\tau(y)\}$  исходим из того, что любая функция этой последовательности помимо зависимости от переменной  $y$ , должна быть счетно-аддитивной функцией элементарных интервалов  $\Delta_l y = [y_{l-1}, y_l]$ , связанных с измельчением  $Y = \{y_l\}_{l=1}^m$  области интегрирования  $\Omega_y$  в интегралах представления для  $f(u)$ . Последнее гарантирует корректное построение интегральных сумм вида (11) для интегралов Стильтеса (12). В связи с последним сделаем некоторые предварительные замечания. Напомним, что всякий интеграл можно рассматривать как функционал от области интегрирования (тоже функцию множества)  $\Omega$ . В связи с этим для интеграла Стильтеса можно писать

$$\int_{\Omega} d\varphi(y) = I(\Omega, \varphi). \quad (30)$$

Если  $\Omega = [a, b]$ , то  $I(\Omega, \varphi) = \varphi(b) - \varphi(a) = |[a, b]|\varphi$ , где через  $|\Omega|_\varphi$  обозначена так называемая  $\varphi$  – мера области интегрирования  $\Omega$ . При построении интегральных сумм типа (11) требуется знать расчетные значения  $\varphi$  – мер элементарных интегралов  $\Delta_l (1, 2, \dots, m)$ , покрывающих область интегрирования  $\Omega_y = \bigcup_{l=1}^m \Delta_l$  для измельчения  $Y = \{y_l\}_{l=1}^m$ . Ясно, что

$$|\Delta_l|_\varphi = \llbracket y_{l-1}, y_l \rrbracket_\varphi = \varphi(y_l) - \varphi(y_{l-1}) = \Delta_l \varphi \quad (31)$$

В правой части символ  $\Delta_l \varphi$  следует понимать как результат действия разностного оператора  $\Delta$  в точке  $y = y_l$  на функцию  $\varphi(y)$ .

### Выводы

#### Пример конструирования интегралов Стильтьеса на основе параметризованных множеств функций

Для того чтобы последующее изложение методов конструирования интегралов Стильтьеса (12) на основе параметризованных множеств функций  $\{\varphi_n(y)\}$  ( $\tau > 0$ ) было более наглядным, в качестве примера рассмотрим функциональную последовательность вида

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( n \frac{x-a}{d} \right) + \operatorname{arctg} \left( n \frac{b-x}{d} \right) \right], \quad (32)$$

где  $l = 1, 2, \dots$  и  $d > 0$  – некий числовой параметр.

Подобные последовательности возникают в приложениях сингулярных интегралов функций в прикладном анализе [3]. Свойства последовательности (32) могут быть охарактеризованы следующими предельными соотношениями.

**Лемма 1.** Для любого  $x \in (a, b)$   $\varphi_n(x)$  удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) &= 1, \\ б) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n(x) dx &= |\Omega_x|, \\ в) \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)| &= 0 \quad (h > 0). \end{aligned} \quad (33)$$

**Доказательство.** Докажем справедливость этих соотношений. Первое из них очевидно в силу того, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(x) = \pi/2$ .

Доказательство б) основывается на прямом вычислении интеграла при данном  $n$ . Имеем

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx = \frac{2}{\pi} \left[ (b-a) \cdot \operatorname{arctg} \left( n \cdot \frac{b-a}{d} \right) + \frac{d}{n} \ln \left( \frac{dn}{\sqrt{d^2 + n^2(b-a)^2}} \right) \right]. \quad (34)$$

Положим, что  $d = |\Omega_x| = (b - a)$ , поскольку  $d$  – произвольная константа в (32). Выражение (34) в этом случае упрощается и принимает вид

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx = |\Omega_x| \cdot \frac{2}{\pi} \left[ \operatorname{arctg}(n) + \frac{1}{2n} \ln \frac{n}{n^2 + 1} \right]. \quad (35)$$

Учитывая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \right) = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(n) = \frac{\pi}{2}$  в пределе (33) дает требуемый результат.

К доказательству последнего предельного соотношения в (33) вернемся ниже, а пока рассмотрим некоторые свойства последовательности  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , важные с точки зрения теории интегрирования по Стильтесу ( $\varphi$  – интегрируемость функций). Нетрудно видеть, что  $\varphi_n(x)$  можно представить в виде суммы двух компонент  $\varphi_{n,1}(x) = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \left( n \frac{x-a}{d} \right)$  и  $\varphi_{n,2}(x) = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \left( n \frac{b-x}{d} \right)$ , из которых первая не убывает в  $\Omega_x$  при  $x \rightarrow b$ , а вторая нигде не возрастает. Подобные свойства составляющих  $\varphi_{n,1}(x)$  и  $\varphi_{n,2}(x)$  позволяют классифицировать  $\varphi_n(x)$  как функцию ограниченной вариации в области своего определения  $\Omega$ . То, что  $\varphi_n(x) \in B \vee (\Omega)$  делает последовательность интегралов вида  $\{\int f(x) d\varphi_n\}_{n=1}^N$  сходящейся для всякой  $\varphi$  – суммируемой функции  $f(x)$ . Последнее следует из теории интегрирования Стильтеса. Последовательность  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  нетрудно преобразовать в параметризованное семейство функций  $\{\varphi_{\tau}(x)\}$  ( $0 < \tau \leq d$ ) путем введения в (32) параметра  $\tau = d/n$  (обратно  $n = d/\tau$ ). В результате (32) преобразуется, принимая вид

$$\varphi_{\tau}(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{x-a}{\tau} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{b-x}{\tau} \right) \right]. \quad (36)$$

Представление (36) удобно при использовании в задачах представления функций оптимизационных алгоритмов. В итоге этих построений интегральные суммы для моделей (6) и (12) примут вид

$$S_m(x, \bar{\xi}, Y) = \sum_{l=1}^m T(x, \xi_l) \Delta_l \varphi_{\tau}, \quad (37a)$$

$$S_m(x, \bar{\xi}, g, Y) = \sum_{l=1}^m T(x, \xi_l) g(\xi_l) \Delta_l \varphi_{\tau}, \quad (37b)$$

где  $Y$  – измельчение  $\Omega_y$  системой узлов  $\{y_l\}_{l=1}^m$  и  $y_{l-1} \leq \xi_l \leq y_l$ .  
В этих выражениях с учетом (36)

$$\begin{aligned} \Delta_l \varphi_{\tau} &= \varphi_{\tau}(y_l) - \varphi_{\tau}(y_{l-1}) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{y_l - a}{\tau} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{b - y_l}{\tau} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{y_{l-1} - a}{\tau} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{b - y_{l-1}}{\tau} \right) \right] \end{aligned} \quad (38)$$

Если узлы  $y_l$ , ( $l = 1, \dots, m$ ) равноотстоящие, то есть  $y_l - y_{l-1} = h$  для всех  $l$ , то можно использовать для расчета формулу

$$\Delta_h \varphi_\tau(y_l) = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{y_l - a}{\tau} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{y_l - a - h}{\tau} \right) \right) + \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{b - y_l}{\tau} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{b - y_l + h}{\tau} \right) \right) \right], \quad (39)$$

где  $a < y_l < b$ ,  $l = 2, \dots, (m - 1)$ .

Теперь третье предельное соотношение в (33) можно рассматривать в виде

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} |\Delta_h \varphi_\tau(y_l)| = 0. \quad (40)$$

Для доказательства его справедливости преобразуем (39), используя известное тождество

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy} \text{ при } xy > -1.$$

Поскольку  $y_l \in (a, b)$  для всех  $l$ , то указанное ограничение всегда выполнимо ( $x > 0$  и  $y > 0$ ). В итоге получаем формулу

$$\Delta_h \varphi_\tau(y_l) = \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{h\tau}{\tau^2 + (y_l - a)(y_l - a - h)} - \operatorname{arctg} \frac{h\tau}{\tau^2 + (b - y_l)(b - y_l + h)} \right]. \quad (41)$$

Ясно, что для всех  $y_l$ , удовлетворяющих условиям  $(y_l - a)(y_l - a - h) \neq 0$ ,  $(b - y_l)(b - y_l + h) \neq 0$ ,  $\lim_{\tau \rightarrow 0} |\Delta_h \varphi_\tau(y_l)| = 0$  для всех  $h > 0$ . Подобное ограничение вполне приемлемо, ибо в концевых точках разностный оператор  $\Delta_h$  просто не определен.

В вычислительных задачах с использованием так называемых сеточных моделей (тоже измельчений  $Y$ ) требуется вводить приемы, именуемые методами фиктивных точек [10]. То обстоятельство, что имеет место соотношение (40), можно рассматривать как способ «управления» процессом сходимости интегральных сумм (37) при  $h \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ ). Речь идет прежде всего о надлежащем выборе значений параметра  $\tau$  (тоже интегрирующей функции  $\varphi_\tau(y)$ ) при конструировании аппаратов представления исследуемых функций  $f(x)$  в виде функционалов  $((Td\varphi_\tau)g)(x)$ . В практическом отношении речь может идти о построении прежде всего подходящей функциональной зависимости параметров  $h$  и  $\tau$  (тоже функции  $h(\tau)$  такой, что  $h(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ ). Последнее особенно важно в тех приложениях, когда требуется не только восстанавливать исследуемые функции, но и оценивать их обобщенные производные. В частности, оператор  $D_h$  в выражении  $D_h((Td\varphi_\tau)g)(x)$  может быть заменен на

оператор  $D_{h(\tau)}$ , который в отличие от исходного допускает его подведение под знак интеграла. В итоге получаем вычислительную схему вида  $((D_{h(\tau)}T)g)(x)$ , реализуемую соответствующим квадратурным процессом.

Выбор параметров модели  $h$  и  $\tau$  для аппроксимационных функционалов типа  $f_\beta(x, g, \varphi_\tau) = ((T_\beta d\varphi_\tau)g)(x)$  в окончательном виде требует надлежащего вычислительного эксперимента для решаемой задачи, допускающей использование каких-либо внешних ограничений на функции и операторы. Вместе с тем, используя аппарат анализа, связанный с теорией приближений функций  $f(x)$  интегралами представления типа  $f_\beta(x, g, \varphi_\tau)$ , можно доказать справедливость следующей леммы 2.

**Лемма 2.** В случае восстановления функции  $f(x)$  на  $\Omega_x$ , представленной своим  $\sigma$  – приближением  $f_\sigma(x)$ , имеет место следующее соотношение для параметров модели  $((T_\beta d\varphi_\tau)g)(x)$

$$\mu(\sigma) < h < \sqrt[\beta]{\tau}. \quad (42)$$

Это соотношение можно в расчетах использовать в форме

$$C_1 \mu \leq h \leq C_2 \sqrt[\beta]{\tau}, \quad (43)$$

где константы  $C_1$  и  $C_2$  подбираются в вычислительном эксперименте.

Остается напомнить, что численные методы, позволяющие строить вычислительные схемы, реализующие изложенную выше теорию приближения функций (и их производных) по приближенным данным представлены в ранее опубликованных работах авторов [1, 2, 5, 9].

#### **Библиографический список**

1. Наац И.Э. Методы приближения суммируемых функций на основе интеграла Стилтеса применительно к задачам прикладного анализа / И.Э. Наац, Е.П. Ярцева // Наука. Инновации. Технологии: Научный журнал Северо-Кавказского федерального университета. Ставрополь, 2016. № 1. С. 33–46.
2. Наац В.И. Метод численного обращения интегрального уравнения с оператором в форме интеграла Лебега-Стилтьеса / В.И. Наац, Е.П. Ярцева // Наука сегодня: постулаты прошлого и современные теории как механизм эффективного развития в условиях кризиса: сборник научных статей по итогам Международной научно-практической конференции (25–26 марта). Санкт-Петербург, 2016. С. 86–91.

3. Ланцош, К. Практические методы прикладного анализа / К. Ланцош. М.: Физматлит, 1961. 524 с.
4. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на фортране / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. М.: Мир, 1977. 584 с.
5. Наац И.Э. Вычислительная модель для дифференциального уравнения с эмпирическими функциями на основе интегрального уравнения Фредгольма первого рода / И.Э. Наац, В.И. Наац, Р.А. Рыскаленко // Наука. Инновации. Технологии: Научный журнал Северо-Кавказского федерального университета. 2016. № 2. С. 37–48.
6. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. М., 1979. 288 с.
7. Натансон, И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. М.: Физматлит, 1949. 526 с.
8. Данфорд Н. Линейные операторы: общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. 427 с.
9. Наац И.Э. Построение обобщенных производных для суммируемых функций на основе их сингулярных интегралов и исследование регуляризации их сходимости / И.Э. Наац, В.И. Наац, Е.П. Ярцева // Естественные и технические науки в современном мире: сборник научных статей по итогам XII Международной научно-практической конференции (г. Москва, 10 февраля 2017г.). М.: Научный журнал «CHRONOS», 2017. С. 54–62.
10. Наац И.Э. Математические модели и численные методы в задачах экологического мониторинга атмосферы / И.Э. Наац, В.И. Наац. М.: Физматлит, 2010. 327 с.

### References

1. Naats I.Je. Metody priblizhenija summiruemyh funkcij na osnove integrala Stilt'esa primenitel'no k zadacham prikladnogo analiza (On the Methods of approximation of integrable functions based on the Stieltjes integral with respect to the tasks applied analysis) / I.Je. Naats, E.P. Jarceva // Nauka. Innovacii. Tehnologii: Nauchnyj zhurnal Severo-Kavkazskogo federal'nogo universiteta. Stavropol', 2016. № 1. S. 33–46.
2. Naats V.I. Metod chislennogo obrashhenija integral'nogo uravnenija s operatorom v forme integrala Lebege-Stilt'esa (Method of numerical treatment of integral equations with operators the form of an integral of the Lebesgue-Stieltjes) / V.I. Naats, E.P. Jarceva // Nauka segodnja: postulaty proshlogo i sovremennye teorii kak mehanizm jeffektivnogo razvittija v uslovijah krizisa: sbornik nauchnyh statej po itogam Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii (25-26 marta). Sankt-Peterburg, 2016. S. 86–91.
3. Lancosh, K. Prakticheskie metody prikladnogo analiza (Practical methods of applied analysis) / K. Lancosh. M.: Fizmatlit, 1961. 524 s.
4. Mak-Kraken D., Dorn U. Chislennye metody i programmirovanie na fort-rane (Numerical methods and programming in Fortran) / D. Mak-Kraken, U. Dorn. M.: Mir, 1977. 584 s.

5. Naats I.Je. Vychislitel'naja model' dlja differencial'nogo uravnenija s jem-piricheskimi funkcijami na osnove integral'nogo uravnenija Fredgol'ma pervogo roda (A computational model for a differential equation with empirical functions on the basis of the integral Fredholm equation of the first kind) / I.Je. Naats, V.I. Naats, R.A. Ryskalenko // Nauka. Innovacii. Tehnologii: Nauchnyj zhurnal Severo-Kavkazskogo federal'nogo universiteta. Stavropol', 2016. № 2. S. 37–48.
6. Tihonov, A.N. Metody reshenija nekorrektnyh zadach (Methods of solving ill-posed problems) / A.N. Tihonov, V.Ja. Arsenin. M., 1979. 288 s.
7. Natanson, I.P. Konstruktivnaja teorija funkcij (Constructive function theory) / I.P. Natanson. – M.: Fizmatlit, 1949. 526 s.
8. N. Danford. Linejnye operatory: obshhaja teorija (Linear operators: General theory) / N. Danford, Dzh. T. Shvarc. M.: Izd-vo inostranoj literatury, 1962. 427 s.
9. Naats I.Je. Postroenie obobshhennyh proizvodnyh dlja summiruemyyh funk-cij na osnove ih singuljarnyh integralov i issledovanie reguljarizacii ih sho-dimosti (On the Construction of generalized derivatives for integrable functions based on their singular integrals and the study of regularization of their convergence) / I.Je. Naats, V.I. Naats, E.P. Jarceva // Estestvennye i tehicheskie nauki v sovremennom mire: sbornik nauch-nyh statej po itogam XII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii (g. Mos-kva, 10 fevralja 2017g.). M.: Nauchnyj zhurnal «CHRONOS», 2017. S. 54–62.
10. Naats I.Je. Matematicheskie modeli i chislennye metody v zadachah jekologi-cheskogo monitoringa atmosfery (On the Mathematical models and numerical methods in problems of ecological monitoring of the atmosphere) / I.Je. Naats, V.I. Naats. M.: Fizmatlit, 2010. 327 s.