УДК 519.65

Корнеев П.К. [Korneev P.K.]
Журавлева И.А. [Juravleva I.A.]
Непретимова Е.В. [Nepretimova E.V.]
Гладков А.В. [Gladkov A.V.]
Лягин А.М. [Lyagin A.M.]

ПРЕДФРАКТАЛЫ КАК ИСТОЧНИК НОВЫХ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ФРАКТАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Prefractal as the source of new rational approximations of functions with a fractal representation.

Статья посвящена актуальной проблеме ускорения сходимости многочленных и дробно-рациональных приближений функций. В теории приближения функций часто используется идея уменьшения интервала изменения аргумента как метода ускорения сходимости степенных и дробно-рациональных приближений, аппроксимирующих данную функцию. В статье, используя эту идею, сначала для данной функции строится ветвящаяся цепная дробь, ветвями которой являются либо функциональные ряды, либо функциональные цепные дроби. В этом случае ветвящаяся цепная дробь, представляющая собой данную функцию, является фракталом и одновременно сжимает интервал изменения аргумента в 2^k (k = 1, 2, ...) раз, где 2^k – число ветвей ветвящейся цепной дроби. То есть вычисление данной функции в точке x сводится к вычислениям в точке $x/2^k$, что естественно и влечет ускорение сходимости степенных и дробно-рациональных приближений. Для построения новых дробно-рациональных приближений ветвящаяся цепная дробь (фрактал) заменяется предфракталом – ветвящейся цепной дробью с конечным числом звеньев. Здесь каждое звено заменяется многочленом либо конечной цепной дробью. В результате можно получить сколь угодно много рациональных приближений.

The Article is devoted to the problem of accelerating the convergence of polynomial and rational approximations of functions. In the theory of approximation of functions often used the idea of reducing the interval change in the argument as a method to accelerate the convergence of exponential and rational approximations, approximating this function. In this article, using this idea, a first for this function builds a branching continued fraction, whose branches are either functional series, functional or chain fractions. In this case, the branching continued fraction representing this function is a fractal and at the same time compresses the range of variation of the argument in 2^k (k = 1, 2, ...) time, where 2^k is the number of branches of the branched chain fraction. That is, the computation of this function at the point x is to compute $x/2^k$, which is natural and leads to acceleration of convergence of exponential and rational approximations. To build a new rational approximations of branching continued fraction (fractal) is replaced by prefractals – chain-branching fraction with a finite number of links. Here each link is replaced by the polynomial finite chain fraction. In the result, we can obtain arbitrarily many rational approximations.

Ключевые слова: аппроксимация, функциональные ряды, цепные дроби, фракталы, сходимость.
Key words: approximation, functional series, continued fractions, fractals, convergence.

Введение

В статьях [4, 5, 6] получены разложения тригонометрических, гиперболических и показательной функций в ветвящиеся цепные дроби с конечным и бесконечным числом ветвей. Показано так же, что ветвящиеся цепные дроби с бесконечным числом ветвей являются фракталами, а соответственно ветвящиеся цепные дроби с конечным числом ветвей – предфракталы.

Источниками получения дробно-рациональных приближений функций одного переменного являются функциональные цепные дроби [1], таблица Паде [2], наилучшие дробно-рациональные приближения [3] и др. В статье [7], используя предфракталы фрактального представления функции $tg(x)$, построены новые дробно-рациональные приближения этой функции и приведены оценки остаточных членов.

Постановка задачи

Здесь получим новые дробно-рациональные приближения для функции $y = sh(x)$ на отрезке $[0; \pi/4]$ и оценки их остаточных членов, используя предфракталы фрактального представления функции.

Методология и методы исследования

Основными методами для вычисления функций на компьютере являются: степенные разложения, рациональные приближения, разложения в цепные дроби, итеративные процессы и другие.

1. В дальнейшем нам понадобятся следующие разложения функций [1, 3]:

$$th(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2\cdot k}\left(2^{2\cdot k}-1\right)}{(2k)!} \cdot B_{2k} \cdot x^{2k-1}, |x| < \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

где B_{2k} – числа Бернулли;

$$th\ x = \frac{x}{1+} \frac{x^2}{3+} \frac{x^2}{5+} \ldots + \frac{x^2}{2k+1+\ldots}, |x| < \frac{\pi}{2}; \tag{2}$$

$$sh\ x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, |x| < \infty; \tag{3}$$

$$sh\ x = x + \frac{x^3}{3!-} \frac{3x^2}{10+} \frac{11x^2}{42-} \frac{25x^2}{66+\ldots}. \tag{4}$$

Ряду (3) соответствует последовательность частичных сумм (тейлоровских многочленов) и оценок норм их погрешностей:

$P_1(x) = x,$

$$P_3(x) = x + \frac{x^3}{3!}, \qquad \|r_3\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 2.53 \cdot 10^{-3};$$
$$P_5(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \qquad \|r_5\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 3.69 \cdot 10^{-5}; \tag{5}$$
$$P_7(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}, \qquad \|r_7\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 3.16 \cdot 10^{-7};$$
$$P_9(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}, \qquad \|r_9\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 1.77 \cdot 10^{-9}$$

и так далее.

Цепной дроби (4) соответствует последовательность ее подходящих дробей и оценок норм их погрешностей:

$$Q_1(x) = \frac{x}{1},$$
$$Q_2(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!}, \qquad \|r_2\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 2.53 \cdot 10^{-3};$$
$$Q_3(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!\,-}\,\frac{3x^2}{10}, \qquad \|r_3\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 4.24 \cdot 10^{-5}; \tag{6}$$
$$Q_4(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!\,-}\,\frac{3x^2}{10\,+}\,\frac{11x^2}{42}, \qquad \|r_4\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 2.31 \cdot 10^{-7};$$
$$Q_5(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!\,-}\,\frac{3x^2}{10\,+}\,\frac{11x^2}{42\,-}\,\frac{25x^2}{66}, \|r_5\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 1.75 \cdot 10^{-9}$$

и так далее.

2. Теперь для функции $y = sh(x)$ построим ее фрактальное представление.

Возьмем известное преобразование

$$sh(x) = \frac{2th\,\frac{x}{2}}{1 - th^2\,\frac{x}{2}} \qquad (th^2\, x/2 \neq 1) \tag{7}$$

и представим его в виде:

$$sh(x) = \frac{-2}{th\frac{x}{2} - \frac{1}{th\frac{x}{2}}}\ . \tag{8}$$

Если вместо функции $y = th\,{}^{x}\!/_{2}$ подставить ее разложение в цепную дробь, то получим разложение функции $y = sh(x)$ в ветвящуюся цепную дробь с двумя ветвями:

$$sh(x) = \cfrac{-2}{\cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\vdots}}} - \cfrac{1}{\cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\vdots}}}}}, \tag{9}$$

где $z = \dfrac{x}{2}$.

Если для функции $y = th\,{}^{x}\!/_{2}$ воспользоваться равенством

$$th\,x = \cfrac{2}{th\dfrac{x}{2} + \cfrac{1}{th\dfrac{x}{2}}}\ , \tag{10}$$

то для функции $y = sh(x)$ получим следующее представление:

$$sh(x) = \cfrac{-2}{\cfrac{2}{th\dfrac{x}{4} + \cfrac{1}{th\dfrac{x}{4}}} - \cfrac{1}{\cfrac{2}{th\dfrac{x}{4} + \cfrac{1}{th\dfrac{x}{4}}}}}. \tag{11}$$

Если вместо функции $th\,{}^{x}\!/_{4}$ в представлении (11) подставить ее разложение в цепную дробь (2), то получим разложение $sh(x)$ в ветвящуюся цепную дробь с четырьмя ветвями:

$$sh(x) = \cfrac{-2}{\cfrac{2}{\cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\vdots}}} + \cfrac{1}{\cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\vdots}}}}} - \cfrac{1}{\cfrac{2}{\cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\vdots}}} + \cfrac{1}{\cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\vdots}}}}}}}, \tag{12}$$

где $z = \dfrac{x}{4}$.

Если воспользоваться равенством (10), то для разложения (12) получим следующее представление:

$$sh(x) = \cfrac{-2}{\cfrac{2}{\cfrac{2}{th\frac{x}{8} + \cfrac{1}{th\frac{x}{8}}} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{th\frac{x}{8} + \cfrac{1}{th\frac{x}{8}}}}} - \cfrac{1}{\cfrac{2}{\cfrac{2}{th\frac{x}{8} + \cfrac{1}{th\frac{x}{8}}} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{th\frac{x}{8} + \cfrac{1}{th\frac{x}{8}}}}}}}. \tag{13}$$

Если вместо функции $th\,{}^{x}\!/_{8}$ в представлении (13) подставить ее разложение в цепную дробь, то получим разложение $y = sh(x)$ в ветвящуюся цепную дробь с восемью ветвями:

$$sh(x) = \cfrac{-2}{R(z) - \cfrac{1}{R(z)}}, \tag{14}$$

где

$$R(z) = \cfrac{-2}{\cfrac{2}{\cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\vdots}}} + \cfrac{1}{\cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\vdots}}}}} - \cfrac{1}{\cfrac{2}{\cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\vdots}}} + \cfrac{1}{\cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\vdots}}}}}}}, \tag{15}$$

$z = \dfrac{x}{8}$.

Процесс «размножения» ветвей представления (14) можно продолжить, в результате чего получим сколь угодно много разложений функции $y = sh(x)$ в ветвящиеся цепные дроби, в которых аргумент имеет вид ${}^{x}\!/_{2^k}$, а 2^k – число ветвей ($k = 1, 2, 3, ...$).

Все эти разложения обладают свойством: каждое из них первоначальный отрезок изменения аргумента $[0, a]$ сжимает в $2^k (k = 1, 2, ...)$ раз, то есть первоначальный отрезок изменения аргумента отображается на отрезок $[0, {}^{a}\!/_{2^k}]$.

Если положить $k = \infty$, то в разложении функции $y = sh(x)$ будем иметь 2^k ветвей, то есть получим множество ветвей мощности континуума; другими словами, получим целое «дерево» ветвей

$$sh(x) = \frac{-2}{R\left(th\frac{x}{2^k}\right) - \frac{1}{R\left(th\frac{x}{2^k}\right)}}, \tag{16}$$

где $R(th\, x/2^k)$ − это в общем случае ветвящаяся цепная дробь с 2^{k-1} ветвями.

В этом дереве ветвей выделим базовую форму

$$\frac{-2}{R(z) - \frac{1}{R(z)}} \tag{17}$$

где $R(z)$ – такая же по форме конструкция как и (16), но каждый раз в процессе размножения ветвей с уменьшающимся в 2 раза значением аргумента, то есть

$$z = \frac{x}{2^k} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Базовая форма (17) повторяется бесконечно со всё уменьшающимся значением аргумента, то есть множество ветвей представления (16) является фракталом [8]. Тогда множество правых частей представлений (9), (12), (14) – предфракталы.

Предфрактал (9) применим для построения дробно-рациональных приближений функции $y = sh(x)$. Для этого предфрактал представим в виде:

$$sh(x) = \frac{-2}{T(z) - \frac{1}{T(z)}}, \qquad z = \frac{x}{2},$$

где $T(z)$ – тейлоровский ряд (1) или цепная дробь (2).

Заменяя $T(z)$ тейлоровскими многочленами (частичными суммами ряда (1)), получим следующие дробно-рациональные приближения для функции $y = sh(x)$

$$sp_1(z) = \frac{2P_1(z)}{1 - P_1^2(z)};$$

$$sp_3(z) = \frac{2P_3(z)}{1 - P_3^2(z)}, \quad \|r_3\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 3.7 \cdot 10^{-3};$$

$$sp_5(z) = \frac{2P_5(z)}{1 - P_5^2(z)}, \quad \|r_5\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 2.3 \cdot 10^{-4};$$

$$sp_7(z) = \frac{2P_7(z)}{1 - P_7^2(z)}, \quad \|r_7\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 1.5 \cdot 10^{-5}$$

и так далее.

Заменяя теперь $T(z)$ подходящими дробями цепной дроби (2), получим следующие дробно-рациональные приближения для функции $y = sh(x)$:

$$sd_1(z) = \frac{2Q_1(z)}{1 - Q_1^2(z)}, \quad \|r_1\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 6 \cdot 10^{-2};$$

$$sd_2(z) = \frac{2Q_2(z)}{1 - Q_2^2(z)}, \quad \|r_2\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 5.7 \cdot 10^{-4};$$

$$sd_3(z) = \frac{2Q_3(z)}{1 - Q_3^2(z)}, \quad \|r_3\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 2.5 \cdot 10^{-6};$$

$$sd_4(z) = \frac{2Q_4(z)}{1 - Q_4^2(z)}, \quad \|r_4\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 6.1 \cdot 10^{-9};$$

$$sd_5(z) = \frac{2Q_5(z)}{1 - Q_5^2(z)}, \quad \|r_5\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 9.4 \cdot 10^{-12}$$

3. Возьмем теперь предфрактал (11) или (12) с четырьмя ветвями

$$sh(x) = \frac{2}{\dfrac{2}{T(z) + \dfrac{1}{T(z)}} - \dfrac{1}{\dfrac{2}{T(z) + \dfrac{1}{T(z)}}}}, \quad z = \frac{x}{4},$$

где $T(z)$ – тейлоровский ряд (1) или цепная дробь (2).

Заменяя $T(z)$ тейлоровскими многочленами (частичными суммами ряда (1)), получим следующие дробно-рациональные приближения для функции $y = sh(x)$:

$$shP_1(z) = \frac{4P_1(z) \cdot (1 + P_1^2(z))}{(1 - P_1^2(z))^2}, \quad \|r_1\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 1.3 \cdot 10^{-2};$$

$$shP_3(z) = \frac{4P_3(z) \cdot (1 + P_3^2(z))}{(1 - P_3^2(z))^2}, \quad \|r_3\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 2.2 \cdot 10^{-4};$$

$$shP_5(z) = \frac{4P_5(z) \cdot (1 + P_5^2(z))}{(1 - P_5^2(z))^2}, \quad \|r_5\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 3.3 \cdot 10^{-6}; \tag{18}$$

$$shP_7(z) = \frac{4P_7(z)\cdot(1+P_7^2(z))}{(1-P_7^2(z))^2}, \quad \|r_7\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 5.2\cdot 10^{-8};$$

$$shP_9(z) = \frac{4P_9(z)\cdot(1+P_9^2(z))}{(1-P_9^2(z))^2}, \quad \|r_9\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 8.1\cdot 10^{-10}$$

и так далее.

Заменяя теперь $T(z)$ подходящими дробями цепной дроби (2), получим следующие дробно-рациональные приближения для функции $y = sh(x)$:

$$\begin{aligned}
shQ_1(z) &= \frac{4Q_1(z)\cdot(1+Q_1^2(z))}{(1-Q_1^2(z))^2}, \quad \|r_1\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 1.2\cdot 10^{-2};\\
shQ_2(z) &= \frac{4Q_2(z)\cdot(1+Q_2^2(z))}{(1-Q_2^2(z))^2}, \quad \|r_2\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 3.5\cdot 10^{-5};\\
shQ_3(z) &= \frac{4Q_3(z)\cdot(1+Q_3^2(z))}{(1-Q_3^2(z))^2}, \quad \|r_3\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 3.9\cdot 10^{-8};\\
shQ_4(z) &= \frac{4Q_4(z)\cdot(1+Q_4^2(z))}{(1-Q_4^2(z))^2}, \quad \|r_4\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 2.4\cdot 10^{-11};\\
shQ_5(z) &= \frac{4Q_5(z)\cdot(1+Q_5^2(z))}{(1-Q_5^2(z))^2}, \quad \|r_5\|_{C\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} < 9.0\cdot 10^{-15}
\end{aligned} \tag{19}$$

и так далее.

Обсуждение результатов исследования

Проведенные вычислительные эксперименты показывают следующие результаты: в предфракталах ветви можно с успехом аппроксимировать как тейлоровскими многочленами, так и подходящими цепными дробями; анализ оценок норм остаточных членов приближений отдает предпочтение аппроксимации ветвей предфракталов функциональным цепным дробям (смотри (18), (19)).

Следует так же отметить, что с увеличением числа звеньев предфрактала качество аппроксимаций значительно улучшается.

Выводы

Процесс получения новых дробно-рациональных приближений для функции $y = sh(x)$ на отрезке $[0; \pi/4]$ можно продолжить как угодно далеко. При этом оценки норм остаточных членов приближений значительно уменьшаются, то есть качество аппроксимаций только улучшается.

Библиографический список

1. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: ГИТТЛ, 1956. 204 с.
2. Джоунс В. Трон. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения / пер. с англ. М.: Мир, 1985. 414 с.
3. Люстерник Л.А., Червоненкис О.А., Янпольсеកий А.Р. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. СМБ. М.: Физматгиз, 1963. 248 с.
4. Корнеев П.К., Гончарова Е.Н., Журавлёва И.А., Непретимова Е.В. Ускорение сходимости степенных и дробно-рациональных разложений, аппроксимирующих тригонометрические и гиперболические функции // Вестник Ставропольского государственного университета. Вып. 63[4], 2009. С. 27-44.
5. Корнеев П.К., Журавлёва И.А., Непретимова Е.В. О разложении функции $\sin x$ в ветвящиеся цепные дроби// Вестник Ставропольского государственного университета. Выпуск 70[5], 2010. С. 11-15.
6. Корнеев П.К., Журавлёва И.А., Непретимова Е.В. Разложение функции $exp(x)$ в ветвящиеся цепные дроби // Вестник Ставропольского государственного университета. 2011 г. №4. С. 14-20.
7. Корнеев П.К., Журавлева И.А., Кравцов А.М., Непретимова Е.В., Гладков А.В., Фрактальное представление тригонометрических и гиперболических функций как метод получения их новых дробно-рациональных приближений // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. № 9, изд-во «Радиотехника». М.: 2014 г. С. 98–102.
8. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах // Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.

References

1. Hovanskij A.N. Prilozhenie cepnyh drobej i ih obobshhenij k voprosam priblizhennogo analiza (Annex of chain fractions and their generalizations to questions of the approximate analysis). M.: GITTL, 1956. 204 s.
2. Dzhouns V. Tron. Nepreryvnye drobi. Analiticheskaja teorija i prilozhenija (Continuous fractions. Analytical theory and applications.). Per. s angl. M.: Mir, 1985. 414 s.
3. Ljusternik L.A., Chervonenkis O.A., Janpol'sekij A.R. Matematicheskij analiz. Vychislenie jelementarnyh funkcij. SMB (Matematichesky analysis. Calculation of elementary functions. SMB). M.: Fizmatgiz, 1963. 248 s.
4. Korneev P.K., Goncharova E.N., Zhuravljova I.A., Nepretimova E.V. Uskorenie shodimosti stepennyh i drobno-racional'nyh razlozhenij, approksimirujushhih trigonometricheskie i giperbolicheskie funkcii

(Acceleration of convergence of the sedate and fractional and rational decomposition approximating trigonometrical and hyperbolic functions) // Vestnik Stavropol'skogo gosudarstvennogo universiteta. Vypusk 63[4], 2009. S. 27–44.

5. Korneev P.K., Zhuravljova I.A., Nepretimova E.V.. O razlozhenii funkcii v vetvjashhiesja cepnye drobi (About decomposition of function in the branching chain fractions) // Vestnik Stavropol'skogo gosudarstvennogo universiteta. Vypusk 70[5], 2010. S.11–15.
6. Korneev P.K., Zhuravljova I.A., Nepretimova E.V.. Razlozhenie funkcii exp(x) v vetvjashhiesja cepnye drobi (Decomposition of the exp (x) function in the branching chain fractions. Messenger Stavropol state university) // Vestnik Stavropol'skogo gosudarstvennogo universiteta. 2011 g. №4. S. 14-20.
7. Korneev P.K., Zhuravleva I.A., Kravcov A.M., Nepretimova E.V., Gladkov A.V., Fraktal'noe predstavlenie trigonometricheskih i giperbolicheskih funkcij kak metod poluchenija ih novyh drobno-racional'nyh priblizhenij (Fractal representation of trigonometrical and hyperbolic functions as method of receiving their new fractional and rational approximations) // Nejrokomp'jutery: razrabotka i primenenie, № 9, izd-vo «Radiotehnika». M.: 2014 g. S. 98–102.
8. Kronover R.M. Fraktaly i haos v dinamicheskih sistemah. Osnovy teorii (Fractals and chaos in dynamic systems. Theory bases). Moskva: Postmarket, 2000. 352 s.